# Suora ja suorien keskinäinen asema

Pro gradu -tutkielma
Maria Heinonen
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
Kevät 2020

# Sisältö

# Johdanto

Opetus peruskouluissa ja lukiossa on kokenut suuria muutoksia lähivuosien aikana. Viimeisimmät opetussuunnitelmat [9] [10] korostavat tutkivaa ja oppilas-/opiskelijalähtöistä oppimista sekä ainerajat ylittävää opetusta. Nämä muutokset ovat johtaneet myös ylioppilaskirjoituksien sähköistymiseen, ja tämä on tuonut haasteita oppimateriaalien tekijöille, jotta oppimateriaalit valmistavat opiskelijoita itsenäiseen ajatteluun ja monipuolisten digitaalisten työkalujen hallintaan. Näitä taitoja tarvittanee sekä sähköisissä ylioppilaskirjoituksissa että tulevaisuudessa työelämässä missä tahansa ammatissa. Tulevaisuudessa opetus tulee muuttumaan lisää eikä sen suuntaa vielä tiedetä. Tällöin oppimateriaaleissa tulisi ottaa huomioon tämän hetkinen opetussuunnitelma, mutta myös luoda pohjaa tulevaan luomalla materiaalit siten, että ne tukevat opiskelijan ajattelun kehittymistä sekä kykyä ratkaista ongelmia.

Tämä pro gradu -tutkielma on osa Oulun yliopiston oppikirjaprojektia, jonka tarkoituksena on tuottaa käytössä olevan opetussuunnitelman mukaista avointa oppimateriaalia lukion matematiikan kursseille. Oppikirjaprojektiryhmä on työstänyt materiaalia lukion MAA5 Analyyttinen geometria -kurssille ja tämä tutkielma kattaa suoran sekä suorien keskinäisen aseman osiot kyseisen kurssin aiheista.

Tutkielma koostuu oppimateriaalista, sen perusteluosasta, opettajan oppaasta sekä tehtävien vastauksista. Ensimmäisenä osana tutkielmassa on tieteellisiin artikkeleihin nojaava perusteluosa, jossa perustellaan oppimateriaalin suunnittelussa tehtyjä valintoja, niin tehtävien tyylin kuin kirjan rakenteenkin osalta. Perusteluosan jälkeen esitellään oppimateriaali, jonka perustana on pohdintatehtävät. Pohdintatehtävien tarkoitus on kehittää opiskelijoiden matemaattista ajattelua ja ongelmanratkaisukykyä ollen avoimia tai ongelmalähtöisiä tehtäviä. Pohdintatehtävien tueksi oppimateriaalissa on haastavimpien aiheiden/tehtävien ymmärryksen helpottamiseksi esimerkki- ja mallitehtäviä. Opettajan oppaassa käydään pohdintatehtävien opetukselliset tavoitteet läpi ja huomautetaan mahdollisista eriyttämisen keinoista tai muista huomionarvoisista seikoista. Pohdintatehtävien vastaukset ja ajankäytön ohjeistus esitellään myös opettajan oppaassa. Lopuksi tutkielmassa annetaan harjoitustehtävien vastaukset.

Tutkielman oppimateriaali on suunniteltu siten, että opiskelijalla olisi mahdollisuus luoda ja kehittää matematiikan taitojaan opettajan avustuksella ja ohjauksella. Keskeisimpänä tavoitteena on opiskelijan ajattelun kehittäminen ja valmistaminen tulevaisuuden haasteisiin luovana matemaattisena ajattelijana.

# 1 Oppikirjan tavoitteet

## 1.1 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2015

Koska kirja on tehty suomalaisten lukioiden käyttöön ja Analyyttinen geometria -kurssin kurssikirjaksi, tärkeintä kirjan sisällössä on, että se noudattaa tämänhetkistä opetussuunnitelmaa, joka otettiin käyttöön syksyllä 2016. Lukion opetussuunnitelman perusteissa [10] Analyyttinen geometria -kurssin tavoitteiksi on asetettu tähän kirjan osaan liittyen, että opiskelija ymmärtää analyyttisen geometrian roolin luoda yhteyksiä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille, ymmärtää pistejoukon yhtälön käsitteen ja oppii hyödyntämään yhtälöitä tutkiessaan pisteitä, suoria, ympyröitä ja paraabeleja sekä osaa käyttää teknisiä apuvälineitä tutkiessaan pistejoukon yhtälöä ja ratkaistessaan yhtälöitä, yhtälöryhmiä, itseisarvoyhtälöitä ja epäyhtälöitä sovellusongelmissa. Lukion opetussuunnitelman perusteissa [10] Analyyttinen geometria -kurssin keskeisin sisältö koskien suoraa ja suorien keskinäistä asemaa on suoran yhtälö. Lukion opetussuunnitelman perusteiden [10] perusteella on tehty koko kirjan rakenne ja painotus eri asioiden välillä. Suora ja suorien keskinäinen asema - osio on vähemmän näkyvässä asemassa opetussuunnitelmassa, mutta matematiikan ollessa kumuloituvaa, täytyy pohja rakentaa hyvin, jotta voidaan siirtyä haastavampiin sovelluksiin. Suora ja suorien keskinäinen asema - osio luo pohjaa muihin opetussuunnitelmassa määrättyihin Analyyttinen geometria -kurssin keskeisiin sisältöihin esimerkiksi ympyrän ja paraabelien yhtälöiden muodostamiseen ja ymmärtämiseen sekä pisteen etäisyyden suorasta hahmottamiseen.

Oppikirjan tulee noudattaa myös lukion opetussuunnitelman perusteissa [10] yleisesti matematiikan opetusta kohtaan asetettuja tehtäviä ja tavoitteita. Matematiikan opiskelun tulee tutustuttaa opiskelijat matemaattisen ajattelun malleihin ja opettaa heitä hyödyntämään taitojaan ongelmien ratkaisemisessa ja ilmiöiden mallintamisessa. [10]. Taitoa tulkita kuvaajia ja graafeja tarvitaan nykypäivänä lähes kaikilla aloilla. Tämä oppikirjan osa ohjaa opiskeilijoita tunnistamaan tilanteita, jolloin matemaattinen mallintaminen on mahdollista suoran avulla. Lukion opetussuunnitelman perusteissa [10] sanotaan, että opetuksen lähtökohdat valitaan opiskelijoita koskettavista aiheista ja niihin liittyvistä ongelmista sekä tuodaan matematiikka lähemmäksi heitä. Pohdinta- ja esimerkkitehtävien aiheet on valittu siten, että ne olisivat mahdollisimman realistisia tilanteita opiskelijoiden elämästä ja voisivat olla osa heidän arkeaan.

Yleisesti matematiikan opetukselle annettujen tavoitteiden lisäksi myös pitkän matematiikan opetukselle on annettu tavoitteet opetussuunnitelmassa. Pitkän matematiikan opetuksessa on tavoitteena, että opiskelija muun muassa rohkaistuu kokeilevaan ja tutkivaan toimintaan sekä ratkaisujen keksimiseen ja niiden kriittiseen arviointiin. [10] Tähän tavoitteeseen pyritään pääsemään pohdinta-, esimerkki-, malli- ja harjoitustehtävillä, jotka ovat avoimia ja jättävät opiskelijoille varaa omaan tulkintaan sekä antavat mahdollisuuden kokeilla ja oivaltaa asioita. Kirjan tehtävillä halutaan myös ohjata opiskelijaa arvioimaan kriittisesti omia ja toisten ratkaisuja. Tällainen tehtävien kriittinen arvioiminen on edistyksellistä oppimista ja tällöin opiskelija on korkeimmalla Bloomin taksonomian tasolla. Tasot ovat tietää, ymmärtää, soveltaa, analysoida, syntetisoida ja arvioida. Oppimisen tulisi olla Bloomin taksonomian tasoilla kehittymistä ja mitä korkeammalle portaalle nousee, sitä syvällisempää oppiminen on. Ylemmille tasoille nouseminen edellyttää alempien tasojen hallitsemista. [5]. Jotta on kykenevä arvioimaan kriittisesti omia ja toisten ratkaisuja, täytyy pystyä jo soveltamaan, analysoimaan ja syntetisoimaan suoraan ja sen yhtälöön liittyviä käsitteitä ja ominaisuuksia. Kirjan tehtävät pyrkivät auttamaan opiskelijoita nousemaan Bloomin taksonomian tasoilla ja saavuttamaan korkeimman eli arvioinnin tason. Arviointiin voidaan ohjata esimerkiksi tehtävillä, joissa opiskelijoille on annettu ratkaistu tehtävä ja heidän täytyy selittää mitä tehtävässä on tehty ja arvioida ratkaisun oikeellisuutta [5].

## 1.2 Habits of Mind

Cuoco, Goldenberg ja Mark käsittelevät artikkelissaan *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula* [3] opiskelijan erilaisia rooleja matematiikan oppimisessa. Artikkelissa esitellään niin sanottuja ajatusmalleja (*habits of mind*), joita opiskelijalla olisi hyvä olla saadakseen kestävämpää ja kokonaisvaltaisempaa osaamista matematiikassa sekä pystyäkseen kohtaamaan haasteita tulevaisuudessa. Koulutuksen haasteena on muun muassa se, että ongelmia, joita opiskelijoiden tulisi osata ratkoa valmistuttuaan, ei vielä ole edes olemassa. Tämän vuoksi erilaisten ajatusmallien omaksuminen auttaa enemmän tulevaisuudessa kuin opitut menetelmät tietyn tyyppisten ongelmien ratkaisuun. Artikkelin mukaiset ajatusmallit ohjaavat opiskelijaa ajattelemaan kuin matemaatikko ja täten saamaan työkaluja erilaisten ongelmien ratkaisuun. [3]. Tämän oppikirjan projektityöryhmän kanssa valittiin kahdeksasta ajatusmallista kolme ajatusmallia. Nämä kolme ajatusmallia, joita kirja mukailee, ovat opiskelija visualisoijana (*visualizer*), kuvailijana (*describer*) ja kokeilijana (*experimenter*).

Opiskelija **visualisoijana** tavoittelee kykyä hahmottaa tasoja ja kolmiulotteisia ulottuvuuksia ilman tarvetta fyysisesti piirtää kyseistä tilannetta. Kokonaiskuvan muodostaminen ja syy-seuraus- suhteiden ymmärtäminen on visualisoijan tähtäimessä. Matemaattinen mielikuvitus auttaa oppijoita kehittämään oppimistaan ja keinoja ratkaista erilaisia tehtäviä. [3]. Tässä kirjan osassa ajatusmallia opiskelijasta visualisoijana toteutetaan muodostamalla tehtävät siten, että algebrallinen ja graafinen esitys tukevat toisiaan. Tehtävissä toistuu kuvaajien tulkinta ja muodostaminen sekä niiden tuominen algebrallisen ratkaisun yhteyteen. Kuvaajilla ja piirtotehtävillä ohjataan opiskelijoita ajattelemaan visuaalisesti tavoitteena opiskelijan kyky visualisoida tilanteet myös ilman konkretiaa.

Kun opiskelija toimii **kuvailijana**, opiskelijalla on kielenä käytössä matematiikan kieli. Opiskelijan tulisi kyetä kuvailemaan tarkasti toimintaansa, esimerkiksi suorittaessaan tehtävää hän kuvailee askeleet, joilla hän pääsi lopputulokseen. Argumentointi helpottuu, kun prosessia pystyy kuvailemaan tarkasti ja voi täten osoittaa tietyn tuloksen todeksi tai todennäköiseksi. Kuvaileminen voi avata solmuja ongelmakohdissa, erityisesti keskustellessa luokkatovereiden kanssa ja jaettaessa ideoita ryhmissä. [3]. Jotta tehtävät tässä oppikirjan osassa tukevat ajatusmallia opiskelijasta kuvailijana, tehtävissä jätetään tilaa avoimelle keskustelulle, parikeskusteluille ja sille, että opiskelija kuvailee ja perustelee tekemiään vaiheita ja päätöksiä tehtävissa kielentämällä matematiikkaa. Osa tehtävistä on pelkästään keskustelutehtäviä, osassa keskustelu tuodaan mukaan osana tehtäviä.

**Kokeilijana** opiskelija testaa erilaisia vaihtoehtoja hakiessaan ratkaisua tehtävään. Kokeileminen avartaa näkemystä ja auttaa kehittämään terveellistä skeptisyyttä kokeellisten tuloksien luotettavuutta kohtaan.[3]. Tässä oppikirjan osassa opiskelija kokeilijana näkyy tehtävissä siten, että tehtävät ovat avoimia ja tarkkaa suuntaa tehtävän ratkaisuun ei anneta, vaan opiskelija voi itse kokeilla erilaisia ratkaisuja. Opiskelijaa ohjataan myös kriittiseen ajatteluun tutkivissa tehtävissä, jotta opiskelija oppisi arvioimaan tehtävän ratkaisun luotettavuutta.

Kirjan tekijöiden kesken sovittiin myös, että kirjassa painotetaan joustavuutta, eli esitetään erilaisia ratkaisuja, annetaan opiskelijoiden kehittää niitä ja autetaan opiskelijoita ymmärtämään erilaisten ratkaisujen merkitys ja hyödyllisyys eri tilanteissa. Pyritään luomaan yhteyksiä aiempien kurssien vastaaville sisällöille ja täten auttaa opiskelijoita huomaamaan matematiikan hienouksia. Kirjassa halutaan välttää ajatusta, että tietyn tyyppiset tehtävät ratkaistaan tietyllä tavalla.

## 1.3 Tehtävätyypit

Swanin artikkelissa *Collaborative Learning in Mathematics* [15] esitellään erilaisia tehtävätyyppejä, jotka rohkaisisivat opiskelijoita erilaisiin ajattelun ja oppimisen tapoihin. Tehtävätyypit korostavat opiskelijan roolia oppimisessaan ja pyrkivät viemään matematiikan opetusta ja oppimista suuntaan, joka kestää aikaa. Oppikirjan keskeisimmiksi tehtävätyypeiksi valittiin yhteisesti kirjan tekijöiden sekä projektia ohjaavien opettajien kanssa Swanin artikkelin [15] pohjalta ratkaisujen vertaaminen, ratkaisun järjestäminen sekä väittämätehtävät, joissa vastausvaihtoehtoina ovat aina totta, joskus totta sekä ei koskaan totta. Yksi kategorioista on päättelyn ja ratkaisujen analysointi. Tähän kategoriaan kuuluvat tehtävät on laadittu siten, että ne saisivat opiskelijan muuttamaan painotusta, jossa tehtäville on saatava vastaus, kohti tilannetta, jossa he kykenevät arvioimaan ja vertailemaan erilaisia perusteluja ratkaisuille. Tehtävätyyppikategoria jakautuu kolmeen osaan, erilaisten ratkaisujen vertailuun, ratkaisun virheiden korjaamiseen sekä ratkaisun vaiheiden järjestämiseen. Kirjaan valitun erilaisten ratkaisujen vertailu -tehtävätyyppi ohjaa opiskelijoita pois ajattelusta, että tietyn tyyppiseen tehtävään on vain yksi tietyn tyyppinen ratkaisutapa. Usein opiskelijoille jää tunne, että jos he eivät tiedä "oikeaa tapaa"ratkaista tehtävää, he eivät voi edes aloittaa ongelman ratkaisua. Tämäntyyppiset tehtävät ohjaavat opiskelijaa kasvattamaan itseluottamustaan ja joustavuuttaan matematiikassa, jolloin heistä tulee vahvempia ongelmanratkaisijoita. Toisen kirjaan valitun tehtävätyypin, ratkaisun vaiheiden järjestäminen, tehtävien tarkoitus on helpottaa opiskelijoiden haasteita tuottaa päättelyketju. Se, että heille annetaan päättelyketjun vaiheet valmiiksi, mutta väärässä järjestyksessä, ohjaa opiskelijoiden keskittymistä taustalla olevaan logiikkaan ja ratkaisun rakenteeseen ennemmin kuin tekniseen suorittamiseen. Matemaattisten väitteiden arviointi on yksi Swanin artikkelin tehtävätyypeistä. Opiskelijoiden täytyy päättää ovatko väittämät aina totta, joskus totta tai ei koskaan totta ja perustella päätöksensä. Tämän kategorian tehtävät ohjaavat opiskelijaa kehittämään heidän kapasiteettiaan selittää, vakuuttaa ja todistaa ratkaisujaan.[15]. Nämä tehtävätyypit tulevat painottumaan kirjan eri osissa ja mukailevat opetussuunnitelmaa sekä Habits of Mind -artikkelista valittuja näkökulmia.

# 2 Oppimateriaalin perustelu

## 2.1 Kirjan rakenne

Tämä kirja koostuu erilaisista osioista, joiden tarkoituksena on tukea opiskelijan matemaattisen ajattelun kehittämistä. Kirjassa teoria pyritään esittämään siten, että samalla osallistetaan opiskelijaa. Aihe on opiskelijoille osittain entuudestaan tuttu, joten tarkoituksena on, että opiskelijat kehittävät osaamistaan matematiikassa edeten Bloomin taksonomian [5] mukaisilla tasoilla korkeammalle. Yläkoulussa opittu suoran yhtälö esitetään erilaisissa muodoissa ja luodaan yhteys graafisen ja algebrallisen esityksen välille. Suoraa on tarkoitus oppia hyödyntämään erilaisissa tilanteissa sekä tutkimaan uusia ominaisuuksia suoralle tai suorille. Opiskelijoita ohjaa pohdintatehtävät, jotka johdattelevat teoriaan tai hyödyntävät jo käytyä teoriaa syventäen opiskelijoiden ajattelua ja osaamista. Teorian ja pohdintatehtävien tueksi kirjassa on esimerkki- ja mallitehtäviä, joissa pääasiassa havainnollistetaan rutiininomaisia laskutehtäviä sekä yhdistetään teorian määritelmiä erilaisiin tehtäviin. Näiden lisäksi oppimista tuetaan harjoitustehtävillä, joissa opiskelijat pääsevät testaamaan jo oppimaansa sekä syventämään osaamistaan.

Avoimet (eng. open-ended) tehtävät voivat vahvistaa opiskelijoiden osaamista kannustamalla heitä todella ajattelemaan matemaattista ongelmaa löytääkseen siihen vaihtoehtoisia ratkaisutapoja. Kun opiskelija ratkaisee ongelman, hän kokee oppineensa matematiikkaa, koska avoimen tehtävän ratkaisu vaatii opiskelijalta muutakin kuin mekaanista suorittamista. Tämä voi vaikuttaa positiivisesti opiskelijan itsevarmuuteen kykyjään kohtaan matematiikassa.[1]. Osa pohdintatehtävistä, esimerkiksi pohdintatehtävät A.12 ja A.19, on tällaisia avoimia tehtäviä, joiden ratkaisussa opiskelijat joutuvat pohtimaan matematiikkaa syvällisemmin ja muokkaamaan ajatusmaailmaansa niin kutsutusta perinteisestä laskutehtävästä avoimempaan ongelmanratkaisuun. Pohdintatehtävät on pyritty muodostamaan siten, että ne ovat ongelmalähtöisiä tehtäviä. Tällaiset ongelmalähtöiset tehtävät kehittävät opiskelijan matemaattista ajattelua, sillä niissä ei ole tiettyä ratkaisutapaa tai kaavaa, jolla ratkaisu saadaan. Ongelmalähtöisillä tehtävillä pyritään tukemaan opiskelijan luovaa ajattelua ja matematiikan syvempää ymmärrystä. Kun ongelma esitetään ennen käsitteiden opetusta, opiskelijat tavallisesti epäonnistuvat etsiessään itse oikeaa ratkaisua ongelmaan. Kuitenkin siinä määrin missä opiskelijat pystyvät käyttämään aiempaa tietämystään lähes optimaalisten tai jopa väärien ratkaisujen luomiseen, prosessi voi olla tuottava valmistamalla heitä oppimaan paremmin ongelmanratkaisua seuraavasta ohjeistuksesta. Yrittäessään itse ensin ja mahdollisesti epäonnistuessaan ja sitten saadessaan ohjausta yhdistyy etsivän ongelmanratkaisun ja ohjatun opetuksen edut. Tällöin vähenee mahdollisuus siihen, että opiskelijat eivät löytäisi omia menettelytapojaan.[6]. Kaikki pohdintatehtävät ohjaavat ajattelua laajempaan matemaattiseen osaamiseen. Pohdintatehtävien on tarkoitus johdatella teoriaan ja saada opiskelijat huomaamaan, mistä lauseiden sisältö saadaan ja ikään kuin johtamaan lauseet ja määritelmät itse. Tällöin heillä on jo aiheesta ennakkokäsitys, jonka tueksi he saavat vielä tarkan teorian. Kaikkia lauseita ja määritelmiä opiskelijat eivät voi johtaa, koska niissä tarvitaan sellaista käsitteellistä tietoa, jota heillä ei vielä ole. Kuitenkin myös tällaisia lauseita ja määritelmiä halutaan tuoda opiskelijoille avoimemmin ja luovempaan ajatteluun johdattelevilla pohdintatehtävillä. Tarkoitus olisi, että opiskelijoille jäisi tehtävistä ymmärrys siitä, mihin lauseet ja määritelmät perustuvat, vaikka tarkkaa matemaattista perustelua heillä ei voi olla.

Opiskelijoille haastavimpia teorian osia käsitellään pohdintatehtävien lisäksi esimerkki- ja mallitehtävissä. Esimerkkitehtävillä halutaan tuoda konkreettinen esimerkki lauseiden ja määritelmien tueksi. Tällöin opiskelijoille annetaan työkaluja ymmärtää lauseet ja määritelmät paremmin sekä osata hyödyntää niitä. Mallitehtävillä annetaan opiskelijoille jokin ratkaisutapa tehtäviin, joissa opiskelijoilla voi olla haasteita. Kuitenkin halutaan välttää tiettyyn ratkaisutapaan jumittumista, joten mallitehtäviä käytetään vain tarkoin valittuihin tehtäviin ja muistutetaan, että muitakin ratkaisutapoja on.

Tässä kirjassa halutaan ohjata opiskelijoita luovempaan ja laajempaan matemaattiseen ajatteluun, jonka tueksi tuodaan myös harjoitustehtäviä. Harjoitustehtävistä osa on mekaanista laskemista vaativia tehtäviä, jotka auttavat erilaisten menetelmien hallintaan. Kuitenkin pääasiassa harjoitustehtävien on tarkoitus auttaa opiskelijoita kehittämään ajatteluaan ja keksimään luovempia ratkaisuja ongelmiin pohdintatehtävien tavoin.

## 2.2 Suora

Suora ja suoran yhtälö ovat opiskelijoille entuudestaan tunnettuja aiheita. He ovat perehtyneet jo alakoulussa suoran käsitteeseen ja yläkoulussa vielä tarkemmin suoran ominaisuuksiin [9]. Kuitenkin suoran opiskelusta on aikaa ja mieleenpalauttaminen sekä orientoituminen tulevaan aiheeseen tehdään ensin. Tämän vuoksi ensimmäinen pohdintatehtävä, A.1, on yksinkertainen opiskelijoiden arkielämään liittyvä tehtävä. Useammassa tutkimuksessa on todettu arkielämän esimerkkien ja opiskelijaa koskettavien aiheiden opiskelun olevan mielekkäämpää sekä tehokkaampaa [11][12]. Opiskelijat pystyvät samaistumaan tilanteeseen ja käytännön kautta tutustumaan matemaattiseen mallintamiseen. Tällöin käytännön sitominen teoriaan on helpompaa ja teorian ymmärtäminen ja sen soveltaminen vaivattomampaa. Myös lukion opetussuunnitelman perusteissa [10] korostetaan aiheiden valintaa opiskelijoita koskettaviksi. Pohdintatehtävässä A.1 käytetään myös graafista esitystä apuna ratkaisun tulkinnassa ja ohjataan opiskelijaa toimimaan visualisoijana [3]. Kuvaajan avulla opiskelija voi yhdistää helpommin arkielämän ongelman matemaattiseen malliin.

Opiskelijoilla on haasteita ymmärtää, mitä kulmakerroin merkitsee. Vaikeudet liittyvät kulmakertoimen muotoon eri asiayhteyksissä.[14]. Pohdintatehtävän A.4 tarkoituksena on laskea kulmakertoimia erilaisille suorille ja vertailla kulmakertoimen eri arvoja siihen, miltä suora missäkin tilanteessa näyttää. Tällöin opiskelija pääsee yhdistämään laskemansa kulmakertoimien arvot visuaaliseen havaintoon suoran käyttäytymisestä. Jotta opiskelijoita voidaan ohjata toimimaan kuvailijana [3], eli kielentämään matematiikkaa, tuodaan tehtävään mukaan kuvaajan muodon sanallinen kuvaaminen. Kulmakertoimen laskennallisten vaikeuksien helpottamiseksi on kirjaan valittu yksinkertainen eri muotoisten suorien kulmakertoimien laskeminen osaksi pohdintatehtävää.

Pohdintatehtävässä A.5 tutkitaan kahta suoraa ja niiden pisteitä. Tehtävässä opiskelija luo yhteyden suoralla olevien pisteiden koordinaattien välille ja siten ohjaa ajatteluaan suoran yhtälön muodostamiseen. Kahta eri suoraa tarkastellaan osittain samojen kysymysten kautta, jolloin opiskelja voi muodostaa sääntöjä ensin yksinkertaisemmalle suoralle ja tämän jälkeen soveltaa tietojaan haastavamman suoran yhtälön muodostamisessa. Opiskelija hyödyntää tehtävässä aiempaa tietoa, kuten kulmakertoimen määritelmää, ja muodostaa teoriaa niiden avulla ennen varsinaista teorian opetusta. Tällöin opiskelijat pääsevät muodostamaan omia menettelytapoja, kun ongelma on esitetty ennen opetusta [6].

Muodostetaan myös yhteys aikaisemman kurssin MAA4 Vektorit ja tämän kurssin välille pohdintatehtävän A.9 avulla. Tässä pohdintatehtävässä opiskelijan on tarkoitus luoda yhteys kulmakertoimelle ja suoran suuntavektorin kertoimille eli opiskelija hyödyntää aikaisempaa osaamistaan ratkaistessaan ongelmaa lukion opetussuunnitelman perusteiden matematiikan opetuksen tavoitteiden mukaisesti [10]. Kun opiskelija joutuu keksimään samalle suoralle useamman suuntavektorin ja tutkimaan niitä, ohjataan opiskelijaa toimimaan kokeilijana sekä kuvailijana selittäessään parille havaitsemiaan ominaisuuksia [3]. Tehtävässä halutaan, että opiskelija havaitsee mitkä kaikki esitysmuodot tarkoittavat samaa suoraa ja erityisesti sen kulmakerrointa. Tämän vuoksi tehtävän suorat ovat samat kuin pohdintatehtävässä A.4. Tällöin opiskelijat voivat vertailla jo laskemiaan kulmakertoimia muodostamiinsa suoran suuntavektoreihin. Sekä pohdintatehtävä A.4 että pohdintatehtävä A.9 yhdistävät algebrallisen ja graafisen esityksen ja tukevat täten opiskelijaa visualisoijana [3].

Pohdintatehtävässä A.12 tutkitaan suoran suuntakulman suuruutta erilaisille suorille sekä sen yhteyttä kulmakertoimeen. Opiskelijoiden käsitteellistä ymmärrystä auttaa, jos heillä on useampia esitystapoja ja merkityksiä samalle aiheelle, tässä tapauksessa suoran käyttäytymiselle. Erilaiset esitysmuodot eivät saisi kuitenkaan olla irrallisia vaan niiden tulisi tukea toisiaan ja auttaa muodostamaan yhtenäinen käsitys aiheesta sekä syvempi ymmärrys käyttötavoista ja merkityksestä.[8]. Tämän vuoksi tehtävään yhdistetään suuntakulman suuruuden tutkimisen lisäksi myös suuntakulman ja kulmakertoimen välisen yhteyden havaitseminen. Opiskelijat joutuvat pohtimaan suoran suuntakulman suuruutta ja visualisoimaan tilannetta ilman fyysistä graafista esitystä. Tällainen visualisoijana toimiminen on Cuocon ja kumppaneiden on mukaan tärkeä osa syvempää oppimista, kun yhdistetään abstrakti visualisointi osaksi tehtävää. Opiskelijoita haastetaan toimimaan kuvailijana parityöskentelyn avulla. [3]. Parityöskentelyssä opiskelijat joutuvat ilmaisemaan havaintonsa ääneen sekä pohtimaan yhdessä, miten suuntakulma saadaan laskettua ja miten se liittyy kulmakertoimeen. Opiskelijoita ohjataan havaitsemaan yhteys eri esitysmuodoille samasta aiheesta ja syventämään ymmärrystä suoran käyttäytymisestä. Tehtävä on muokattu Naglen ja Moore-Russon artikkelin tehtävästä [8].

Pohdintatehtävä A.16 ajaa opiskelijat ajattelemaan pidemmälle heille jo tutussa tehtävässä. Heidät ohjataan muodostamaan ratkaistusta suoran yhtälöstä yleinen suoran yhtälö. Tässä pohdintatehtävässä opiskelijat järjestelevät ratkaisun vaiheet oikeaan järjestykseen ja pohtivat mitä vaiheissa on tehty. Tällöin heidän ei tarvitse keskittyä tekniseen suorittamiseen vaan taustalla olevaan logiikkaan ja ratkaisun rakenteeseen, jolloin opiskelija voi ymmärtää paremmin mitä ratkaisun vaiheissa on tehty ja miksi. [15]. Opiskelijat osaavat tässä vaiheessa jo muodostaa ratkaistun suoran yhtälön eikä sen muodostaminen itse tässä tehtävässä toisi lisäarvoa, joten nämä vaiheet on tehty heille valmiiksi ja he voivat keskittyä ymmärtämään vaiheita ja selvittämään mitä vaiheissa on tehty.

Pohdintatehtävä A.18 ohjaa opiskelijoita hyödyntämään eri suoran yhtälön muotoja ratkaistessaan suoraan liittyviä tärkeiden ominaisuuksien arvoja. Tehtävässä vertaillaan kahta eri ratkaisua, joissa on eri suoran yhtälön muodot. Tällä halutaan tuoda esille vaihtoehtoisia ratkaisutapoja ja sitä, että ei ole vain yhtä oikeaa tapaa ratkaista tehtävä. Toinen yhtälön muoto voi olla opiskelijoille tutumpi ja suositumpi, jolloin on tärkeää, että he pääsevät vertailemaan eri tapoja ja saada heidät huomaamaan mahdollisesti hyödyllisiä ominaisuuksia itselle ei niin mieluisassa ratkaisutavassa. Ratkaisujen vertailu -tehtävässä Swanin artikkelin mukaan ohjataan opiskelijaa kasvattamaan itseluottamustaan ja juostavuuttaan matematiikassa. Ratkaisujen vertailu -tehtävään on myös yhdistetty toinen Swanin artikkelin mukainen tehtävätyyppi, joka on virheiden etsiminen ja niiden perustelu. Tällainen tehtävä vaatii opiskelijaa perehtymään tarkemmin valmiiseen ratkaisuun sekä tunnistamaan ja korjaamaan virheet. Tällöin opiskelija joutuu asettumaan kriittiseen arvioijan asemaan. Korjatessaan virheitä opiskelija haastetaan ajattelemaan vaihtoehtoisella tavallla. [15]. Opiskelijan tulee myös pohtia, ovatko virheet ajatusvirheitä vai laskuvirheitä, jolloin heitä ohjataan syvempään kriittiseen ajatteluun.

Harjoitustehtävissä kerrataan pohdintatehtävien ja teorian asioita ja syvennetään ymmärrystä millaisia suoria on olemassa ja mitä ominaisuuksia niillä on. Harjoitustehtävässä 1 opiskelija pääsee toimimaan visualisoijana [3] yhdistämällä graafisen esityksen algebralliseen tai sanalliseen esitykseen. Opiskelijat luovat mielessään kuvan algebralliselle/sanalliselle esitykselle ja etsivät sitä vastaavan graafisen esityksen. Tällainen matemaattinen mielikuvitus auttaa oppijoita kehittämään oppimistaan [3]. Tehtävä on Swanin artikkelissa [15] mainitun tehtävätyypin, eri esitysmuotojen tulkinnan, mukainen tehtävä, jossa luodaan yhteyksiä eri esitysmuotojen välille ja rakennetaan merkityksiä erilaisille esityksille [15].

Harjoitustehtävässä 2 opiskelijat pääsevät luomaan suoran yhtälöitä annettujen rajoitusten perusteella. He joutuvat pohtimaan mitä ominaisuuksia suoralla on ja miten kyseistä ominaisuutta ilmaistaan matemaattisesti. Tehtävässä ei rajoiteta suoran yhtälön muotoa eikä ratkaisutapaa. Lisäksi tehtävässä opiskelija joutuu pohtimaan saamansa ratkaisun ainutlaatuisuutta, onko se ainoa mahdollinen ratkaisu ja miksi. Tällä halutaan ohjata opiskelijaa ajattelemaan tilannetta eri näkökulmista.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa [10] korostetaan matematiikan yhteyttä arkielämään sekä tuodaan matematiikkaa lähemmäksi opiskelijoita aiheilla, jotka koskettavat heitä. Tämän vuoksi harjoitustehtävässä 3 on kulmakertoimien laskemisessa yhdistetty arkielämän aihe sekä luotu yhteys toiseen oppiaineeseen, fysiikkaan. Lisäksi tuodaan graafinen esitys osaksi tehtävänantoa, mistä opiskelija saa päättelyynsä tukea. Opiskelija harjoittelee kuvaajan tulkitsemista ja yhdistää algebrallisen ratkaisun graafiseen esitykseen. Tällöin opiskelijaa tuetaan toimimaan visualisoijana [3]. Harjoitustehtävällä halutaan myös auttaa opiskelijoita ehkäisemään ongelmia perustella kulmakerroin, missä heillä on Stumpin artikelin [14] mukaan haasteita.

Harjoitustehtävässä 4 yhdistetään saman suoran eri esitysmuotoja. Swanin artikkelin [15] yksi tehtävätyyppikategoria on eri esitysmuotojen tulkinta. Tämän tehtävätyypin tehtävissä opiskelijat luovat yhteyksiä eri esitysmuotojen välille ja rakentavat merkityksiä erilaisille esityksille [15]. Harjoitustehtävän tarkoitus on auttaa opiskelijoita tunnistamaan suoran eri esitysmuotoja. Halutaan välttää tilannetta, jossa opiskelijat ovat tottuneet tunnistamaan suoran vain tietyn tyyppisestä esityksestä.

## 2.3 Suorien keskinäinen asema

Pohdintatehtävä A.19 on avoin tehtävä, jossa opiskelija ei tiedä aluksi kysymystä vaan ratkaisun vaiheita. Tämän tyyppinen tehtävä pakottaa opiskelijan ajattelemaan matemaattista ongelmaa eri näkökulmasta ja kehittämään luovuuttaan matematiikassa. Vaikka todellinen matemaattinen aktiivisuus on sidottu tiukasti luovuuteen, ei opiskelijoilla useimmiten ole koulunkäynnissä mahdollisuuksia havaita luovuuttaan matematiikan eri osa-alueilla. Luovuus liittyy läheisesti syvälliseen, joustavaan osaamiseen ja vaatii usein pidempää pohdiskelua ja työstämistä kuin vain poikkeuksellista kykyä oivaltaa. Luovasti ajatellessa on valmiimpi opetuksen ja kokemuksien vaikutukselle. [13]. Tässä tehtävässä ohjataan opiskelijaa ajattelemaan laajemmin ja luovemmin ongelmaa, joka on jo osittain ratkaistu. Huntleyn ja kumppaneiden tutkimuksessa suorien leikkauspisteiden ratkaisemisen haasteista havaittiin, että opiskelijat pystyvät ymmärtämään yhden yhteisen pisteen suorien välillä paremmin kuin sen, että suorat eivät leikkaa toisiaan tai suorat ovat samat [4]. Koska yhden yhteisen pisteen ymmärtäminen on helpompaa, on tässä tehtävässä valittu suorat siten, että ne leikkaavat kerran ja yhtälön ratkaisussa muodostuu opiskelijoille tutuin vastaus. Ratkaisu ei ole kokonaisuudessaan valmis, vaan opiskelijan tulee esittää oma ratkaisunsa tehtävän viimeistelemiseksi. Jokaisessa vaiheesssa opiskelijan tulee pohtia mitä on jo tehty ja miksi sekä mitä on vielä tekemättä. Lopuksi opiskelijan tulee muotoilla tehtävänanto ongelmaan, jota hän on tutkinut ja ratkaissut.

Pohdintatehtävä A.20 on karsittu versio Swanin artikkelin [15] mukaisesta tehtävästä, jossa opiskelija tutkii väittämiä, jotka ovat aina totta, joskus totta tai ei koskaan totta. Tässä tehtävässä väittämät ovat joko aina totta tai ei koskaan totta. Opiskelijoiden tulee pohtia erilaisia tilanteita väittämien kohdalla ja perustella miksi jokin tilanne toteutuu tai ei toteudu. Yksi väittämistä on kuitenkin sellainen, joka voi olla myös joskus totta, kuten Swanin artikkelin tehtävätyypin mukaisissa tehtävissä. Tällä väittämällä halutaan tuoda tehtävänannosta poikkeava tapaus, jolla halutaan saada opiskelija pohtimaan väittämiä tarkemmin ja huomaamaan, että tapaukset eivät ole aina yksiselitteisiä. Tehtävässä ohjataan opiskelijaa myös toimimaan kokeilijana[3], kun hän joutuu miettimään, millaisissa tilanteissa suorilla on yhteisiä pisteitä ja millaisissa ei. Tähän ohjaa suoran yhtälöiden muodot, jossa jokin suoran ominaisuuksia kuvaavista termeistä on korvattu muuttujalla.

Pohdintatehtävä A.21 ohjataan opiskelijaa pohtimaan suorien välistä kulmaa ja miten se voidaan selvittää. Suorien välisen kulman selvittämiseen on useita tapoja ja tässä pohdintatehtävässä esitellään kaksi erilaista ratkaisutapaa. Kyseessä on Swanin artikkelin mukainen ratkaisujen vertailu -tehtävätyypin tehtävä [15], jolla saadaan opiskelija keskittymään enemmän ymmärtämään ratkaisujen logiikkaa ja syitä kuin niin sanotusti vain ratkaisemaan tehtävää. Tähän ratkaisujen vertailu -tehtävään ei ole varsinaisesti yhdistetty virheen etsimistä, vaikka siinä pieni huomautus lopputuloksessa sisältyykin, vaan opiskelijoiden on tarkoitus pohtia mahdollisia ongelmakohtia, joissa virhe heidän mielestään voisi helpoiten syntyä. Tällä halutaan saada opiskelijat pohtimaan tarkemmin omaa ratkaisuaan verrattuna jo valmiisiin ratkaisuihin.

Jotta opiskelijoiden mahdollista virheellistä käsitystä leikkaavien ja kohtisuorien suorien eroista ja yhtäläisyyksistä [7] vältettäisiin, on pohdintatehtävässä A.23 ohjattu opiskelijaa vertailemaan leikkaavien ja kohtisuorien suorien ominaisuuksia. Tehtävä on Swanin artikkelin mukainen väittämä-tehtävä, jossa väitteet ovat joko aina totta, joskus totta tai ei koskaan totta. Tämän tyyppinen tehtävä auttaa opiskelijoita kehittämään kapasiteettiaan selittää, vakuuttaa ja todistaa ratkaisujaa. [15]. Lisäksi tehtävään otetaan mukaan parityöskentely osaksi tehtävän ratkaisua, jolloin opiskelijaa ohjataan toimimaan kuvailijana [3]. Tehtävässä on myös haluttu ohjata opiskelijaa pohtimaan kulmakertoimien vaikutusta siihen, miten suorat voivat leikata toisensa.

Pohdintatehtävässä A.25 osoitetaan kohtisuorien suorien kulmakerrointen tulo. Opiskelijat järjestävät ratkaisun vaiheet oikeaan järjestykseen yhden Swanin artikkelista [15] valitun tehtävätyyppikategorian mukaisesti. Usein opiskelijat epäilevät kykyjään todistaa lauseita ja määritelmiä, esimerkiksi Anapan ja Samkarin tutkimuksen mukaan opiskelijat eivät koe onnistuvansa matemaattisessa todistamisessa, vaikka he kokevat menestyvänsä matematiikassa [2]. Tämän pohdintatehtävän tarkoitus on lievittää todistustehtävien pelkoa, sillä ratkaisun vaiheet ovat valmiina ja ne täytyy perustellusti järjestää oikeaan järjestykseen. Opiskelijat pystyvät keskittymään siihen, mitä ratkaisun vaiheissa on tehty ja miksi sekä ymmärtämään todistuksen taustalla olevan päättelyketjun, mikä auttaa heitä kehittämään itseluottamustaan ja uskomaan kykyihinsä matematiikassa [15].

Harjoitustehtävillä tuetaan ja syvennetään opiskelijoiden osaamista pohdintatehtävien ja määritelmien mukaisista asioista. Harjoitustehtävässä 6 opiskelijat pääsevät luomaan GeoGebralla erilaisia tilanteita kahden suoran välillä. He joutuvat pohtimaan mitä erilaisia tilanteita on olemassa ja visuaalisesti etsimään ne kaikki tilanteet. Opiskelijat joutuvat myös selvittämään suorien yhtälöt eli algebrallisen esityksen tilanteelle. Tällöin he toimivat visualisoijana ja algebrallinen sekä graafinen esitys tukevat toisiaan [3].

Harjoitustehtävässä 7 opiskelijat selvittävät suorien välisiä kulmia graafisten esitysten ja suoran yhtälöiden avulla. Eri tilanteissa opiskelijat joutuvat pohtimaan, mitä suorista milloinkin tiedetään ja voiko kaikkia heidän tietämiään ratkaisutapoja käyttää kyseisissä kohdissa.

Harjoitustehtävä 8 on tehtävä, jossa harjoitellaan ottamaan tarvittavat tiedot irti suoran yhtälöstä ja hyödyntämään tietoja uuden suoran yhtälön muodostamisessa annetuin ehdoin. Tehtävän tarkistukseen otetaan mukaan GeoGebra ja sitä kautta visuaalisuus tuodaan yhteen algebrallisen esityksen kanssa.

Harjoitustehtävän 9 tarkoitus on syventää sekä suorien välisen leikkauspisteiden että suorien välisten kulmien ratkaisuun liittyviä seikkoja ja huomata, että vastauksilla on myös jokin merkitys.

Harjoitustehtävässä 10 tarkoitus on vielä syventää kohtisuorien suorien välisen yhteyden havaitsemista ja suorien yhtälöiden muotojen tarkastelua kyseisessä tilanteessa. Kohtisuorien suorien yhtälöiden muodostaminen ja tunnistaminen ovat tärkeässä roolissa kirjan myöhemmissä osissa, joten niiden oppiminen on tärkeää.

# Viitteet


[1] Al-Absi, M. (2013). The effect of open-ended tasks–as an assessment tool-on fourth graders' mathematics achievement, and assessing students' perspectives about it. *Jordan journal of educational sciences,* 9(3), 345-351.

[2] Anapa, P., and Şamkar, H. (2010). Investigation of undergraduate students' perceptions of mathematical proof. *Procedia-Social and Behavioral Sciences,* 2(2), 2700-2706.

[3] Cuoco, A., Goldenberg, E.P. and Mark, J. (1996). *Habits of Mind: An Organizing Principle for Mathematics Curricula. Journal mathematical behavior, 15*, 375-402.

[4] Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., and Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(2), 115-139.

[5] Karaali, G. (2011). An evaluative calculus project: Applying Bloom's taxonomy to the calculus classroom. *Primus : Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, 21*(8), 719-731. Retrieved from https://search.proquest.com/docview/1283750114?accountid=13031

[6] Kapur, M. (2014). Productive failure in learning math. *Cognitive Science, 38*(5), 1008-1022.

[7] Mistretta, R. (2003). Intersecting and Perpendicular Lines: Activities to Prevent Misconceptions. *Mathematics Teaching in the Middle School,* 9(2), 84-91. Retrieved from www.jstor.org/stable/41181856

[8] Nagle, C. R., and Moore-Russo, D. (2013). Connecting slope, steepness, and angles. *Mathematics Teacher, 107*(4), 272-279. Retrieved from https://search.proquest.com/docview/1651846500?accountid=13031

[9] Opetushallitus. (2014). *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet.* Helsinki: Opetushallitus.

[10] Opetushallitus. (2015). *Lukion opetussuunnitelman perusteet.* Helsinki: Opetushallitus.

[11] Pierce, R. and Stacey, K. (2006). *Enhancing the image of mathematics by association with simple pleasures from real world contexts.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. 38(2) 214–225

[12] Pierce, R. and Stacey, K. (2011) *Using Dynamic Geometry to Bring the Real World Into the Classroom.* In: Bu L., Schoen R. (eds) Model-Centered Learning. Modeling and Simulations for Learning and Instruction, vol 6. SensePublishers

[13] Silver, E.A. Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 29, 75–80 (1997) doi:10.1007/s11858-997-0003-x

[14] Stump, S. L. (2001). *High school precalculus students' understanding of slope as measure.* School Science and Mathematics, 101(2), 81-89

[15] Swan, M. (2006). *Collaborative Learning in Mathematics.* Shell Centre for Mathematics Education. University of Nottingham. England.

[16] Zahner, W.C. (2011). *How to do math with words: Learning algebra through peer discussion.* University of California. Santa Cruz.

# A Analyyttinen geometria

Tässä kirjan kappaleessa tutustutaan tarkemmin erääseen pistejoukkoon, suoraan. Kappaleessa keskitytään suoran yhtälöön, sen eri esitysmuotoihin, suoran suunnan tarkastelutapoihin sekä suorien keskinäiseen asemaan. Suoran yhtälöä voidaan soveltaa muun muassa erilaisiin arkielämän tilanteisiin sekä fysiikassa mallintamaan yksinkertaisia/yksinkertaistettuja tilanteita useilla eri osa-alueilla.

## A.1 Suora

**Pohdinta A.1** Opiskelija on kesätöissä puhelinmyynnissä. Hän saa kuukaudessa peruspalkan lisäksi bonuksia myydyistä tuotteista. Ensimmäisen kuukauden aikana hän myi 50 tuotetta ja sai palkkaa 2000 euroa. Seuraavan kuukauden aikana hän myi 100 tuotetta ja tienasi 2500 euroa.

a. Kuinka paljon opiskelija saa yhdestä myydystä tuotteesta bonusta?

b. Minkä verran opiskelija saa peruspalkkaa kuukaudessa?

c. Piirrä tilannetta kuvaava kuvaaja $(x, y)$-koordinaatistoon, jossa kokonaispalkka esitetään myytyjen tuotteiden määrän funktiona.

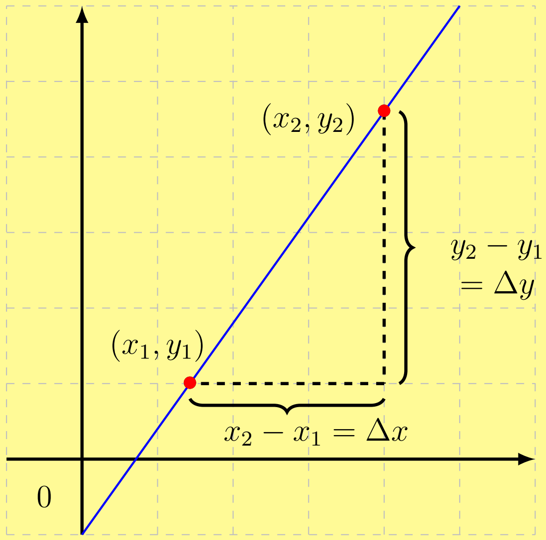
d. Mitä kuvaaja esittää? Miten a.-kohdan yhden tuotteen bonus näkyy kuvaajassa? Entä peruspalkka?

**Määritelmä A.2** Kahden pisteen $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ , $x_1 \neq x_2$, kautta kulkevan suoran *kulmakerroin* on

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

eli

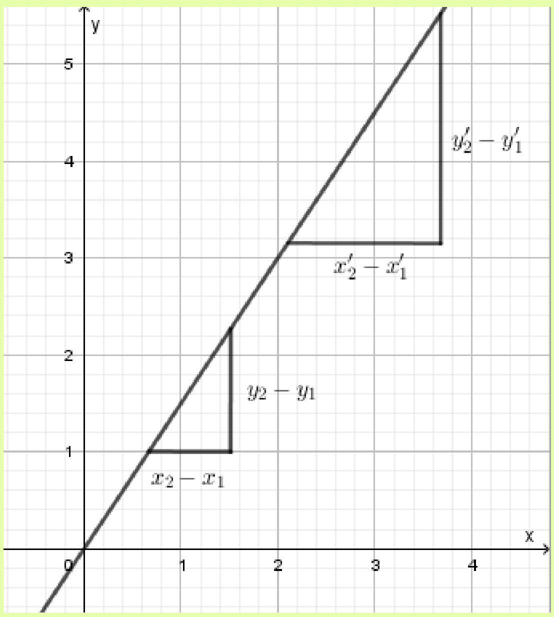
$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$




**Huomautus A.3** Kulmakerrointa laskettaessa pisteiden järjestys on epäoleellinen, sillä

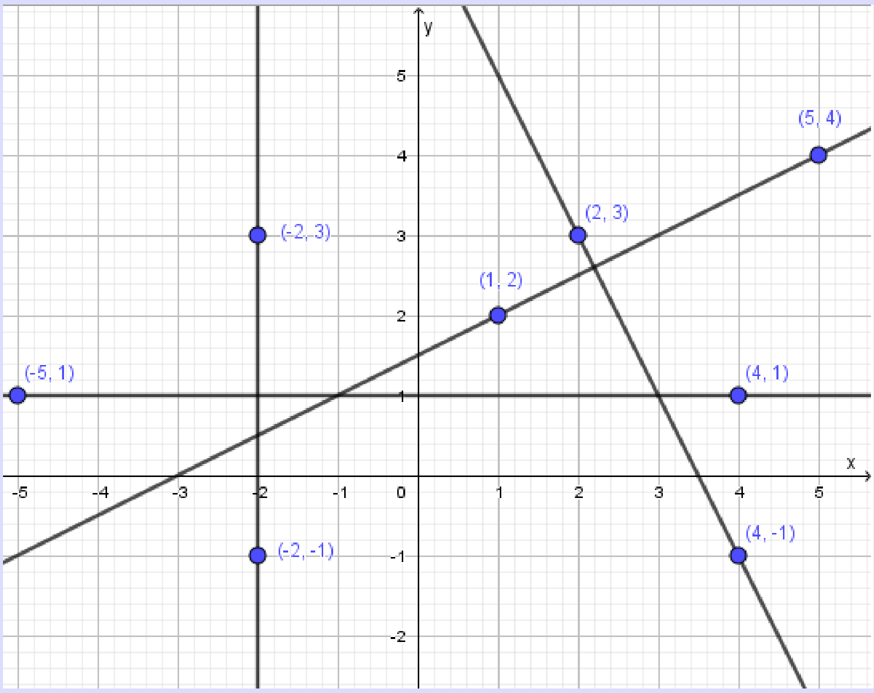
$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-(y_2 - y_1)}{-(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Kulmakerroin ei myöskään riipu suoran pisteiden valinnasta. Mitkä tahansa suoran pisteet $(x_1, y_1)$ ja $(x_2, y_2)$ antavat saman kulmakertoimen, koska kaikki suoralle piirretyt kaltevuuskolmiot ovat yhdenmuotoisia.




Suoran kaltevuutta (tai jyrkkyyttä) voidaan kuvata usealla tavalla, joista yksi on kulmakertoimen määrittäminen. Kulmakerroin on pystysuuntaisen muutoksen ja vaakasuuntaisen muutoksen suhde. Tätä suhdetta hyödynnetään monissa fysiikan malleissa, esimerkiksi kappaleen liikettä voidaan tarkastella aika-matka-koordinaatistossa, jolloin suoran kulmakerroin kertoo keskimääräisen nopeuden.

**Pohdinta A.4** Kuvassa on esitetty neljä suoraa ja jokaiselta suoralta kaksi pistettä.



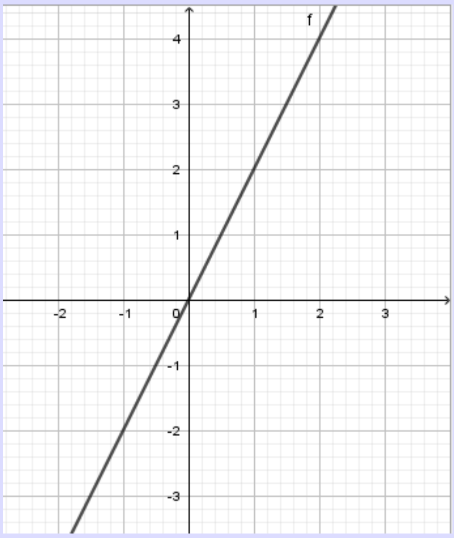

a. Muodosta jokaiselle suoralle kulmakerroin.

b. Minkälaisille suorille kulmakertoimen laskeminen on ongelmallista?

c. Vertaile suoran kulmakerrointa ja kuvaajaa sekä kuvaile, millaisia ominaisuuksia suoralla on riippuen sen kulmakertoimesta. Voit käyttää GeoGeobraa apuna havainnoinnissa.

Kaikille suorille ei voida määrittää kulmakerrointa. Suorille, joilla on kulmakerroin, voidaan muodostaa yhtälö kulmakertoimen avulla. Tutkitaan suoran yhtälön muodostumista pohdintatehtävän A.5 avulla.

**Pohdinta A.5** Tutki kuvan suoraa $f$ ja taulukoituja suoran pisteitä.



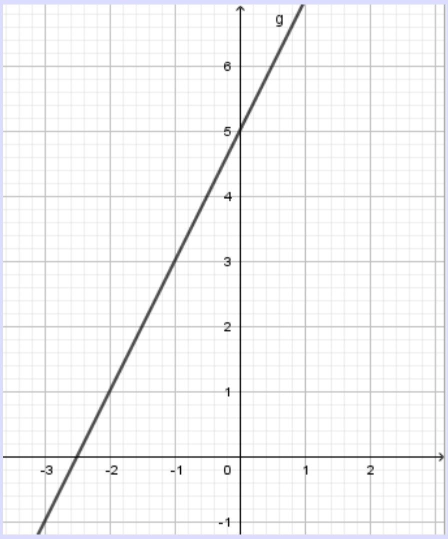

| x-koordinaatti | y-koordinaatti |
|---|---|
| -3 | -6 |
| -1/2 | -1 |
| 0 | 0 |
| 1 | 2 |
| 3/2 | 3 |

a. Mikä yhteys $y$- ja $x$-koordinaateilla on?

b. Mikä on suoran kulmakerroin?

c. Olkoon yleinen piste $A = (x, y)$. Miten $y$-koordinaatin lauseke täytyy muodostaa, jotta piste $A$ kuuluu myös kuvan suoralle?

Tutki kuvan suoraa $g$ ja taulukoituja suoran pisteitä.




| x-koordinaatti | y-koordinaatti |
|---|---|
| -3 | -1 |
| -1/2 | 4 |
| 0 | 5 |
| 1 | 7 |
| 3/2 | 8 |

e. Mitä yhteistä suoralla $g$ on aikaisemman suoran $f$ kanssa?

f. Mitä $y$-koordinaatteihin on lisätty verrattuna aikaisempaan suoraan?

g. Miten lisäys näkyy kuvaajassa?

h. Muodosta $y$-koordinaatin arvo $x$-koordinaatin arvon avulla jokaiselle taulukoidulle pisteelle.

i. Olkoon yleinen piste $B = (x, y)$ suoran $g$ piste. Muodosta $y$-koordinaatin lauseke $x$-koordinaatin avulla.

j. Mitä $x$-koordinaatin kerroin kuvaa $y$-koordinaatin lausekkeessa?

k. Entä mitä vakiotermi tarkoittaa?

l. Mitkä ovat suorien $f$ ja $g$ yhtälöt?

Kuten edellä olevasta pohdintatehtävästä käy ilmi, kulmakertoimen ja $y$-akselin leikkauspisteen avulla saadaan muodostettua suoran yhtälö, joka on muotoa $y = kx + b$. Tätä kutsutaan *ratkaistuksi suoran yhtälöksi*. Kun suora kulkee pisteen kautta, joka ei ole $y$-akselilla, saadaan suoran yhtälö muodostettua suoraan kulmakertoimen määritelmästä.

**Määritelmä A.6** Pisteen $(x_0,y_0)$ kautta kulkevan suoran yhtälö on

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

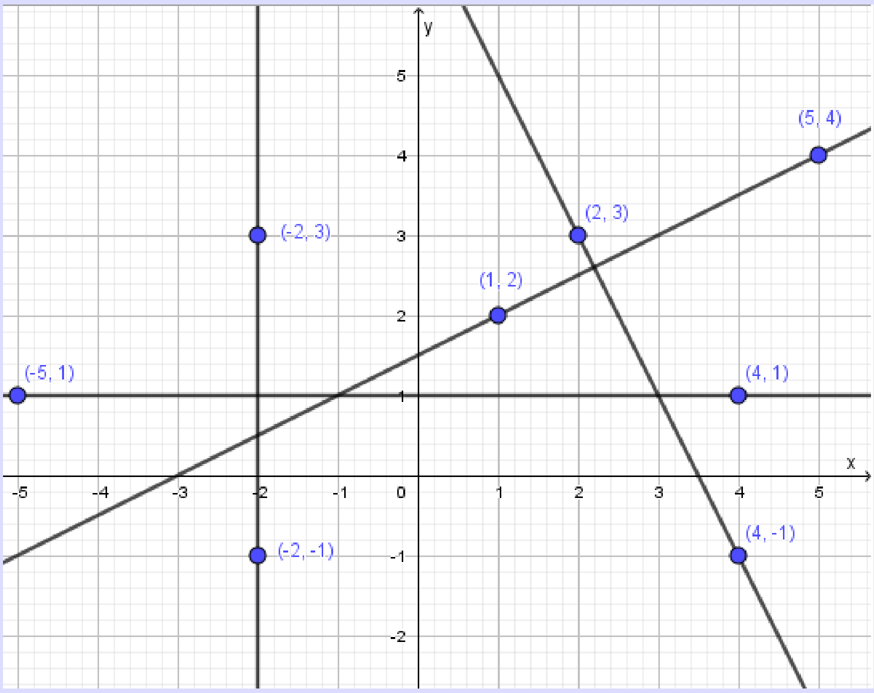
kun suoran kulmakerroin on $k$.

**Huomautus A.7** Jos suoralla ei ole kulmakerrointa, eli suora on pystysuora, suoran yhtälö on

$$x = x_0.$$

**Lisätieto A.8** Suuntavektori on mikä tahansa suoran suuntainen vektori ja se on muotoa $\bar{s} = s_x\bar{i} + s_y\bar{j}$.

**Pohdinta A.9** Tutkitaan pohdintatehtävän A.4 suoria lisää.




a. Määrää jokaiselle suoralle jokin sen suuntavektori. Vertaile parin kanssa erilaisia suuntavektoriesityksiä samalle suoralle.

b. Vertaile pohdintatehtävässä A.4 laskettuja suorien kulmakertoimia muodostamiisi suuntavektoreihin.

c. Miten voit hyödyntää suuntavektoria kulmakertoimen muodostamisessa? Selitä sanallisesti parillesi.

d. Muodosta suorille kulmakertoimet suuntavektoreiden avulla.

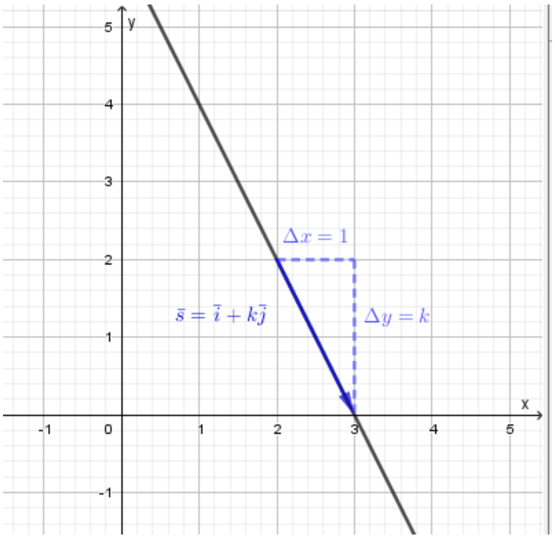
e. Muodosta suorille suuntavektorit kulmakertoimien avulla.

f. * Jos suoran kulmakerroin on $k$, niin millainen eräs suoran suuntavektori silloin on?

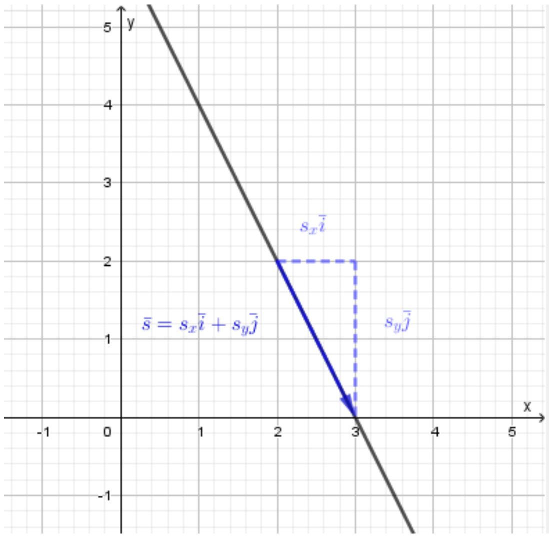
Kuten pohdintatehtävissä A.4 ja A.9 havaittiin tason suoran kulmakertoimella ja suuntavektorilla on yhteys ja ne voidaan muodostaa toistensa avulla. Täytyy kuitenkin muistaa, että suoran suuntavektori ei ole yksikäsitteinen, koska mikä tahansa suoran suuntainen vektori on suuntavektori.

**Huomautus A.10** Kaikille suorille ei voida määrittää kulmakerrointa, mutta suuntavektori voidaan määrittää mille tahansa suoralle.

**Esimerkki A.11** Havainnollistetaan suuntavektorin ja kulmakertoimen välistä yhteyttä.




Jos suoran kulmakerroin on $k$, niin suoran eräs suuntavektori on $\bar{s} = \bar{i} + k\bar{j}$.




Jos $\bar{s} = s_x\bar{i} + s_y\bar{j}$ on suoran suuntavektori, suoran kulmakerroin $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s_y}{s_x}$.

**Pohdinta A.12** Parityöskentely.
Matkailija seisoo pisteessä $P = (x_0, y_0)$ ja katsoo kuumailmapalloa, joka on pisteessä $Q$ ja lähdössä ilmaan. Kuumailmapallo nousee suoraan ylöspäin. Piste $Q = (x, y)$ kuvaa kuumailmapallon paikkaa sen noustessa.


a. Kun kuumailmapallo nousee, mitä tapahtuu pisteiden $P$ ja $Q$ kautta piirretyn suoran kulmakertoimelle?

b. Suoran ja $x$-akselin välistä kulmaa kutsutaan suuntakulmaksi. Mitä suuntakulmalle tapahtuu kuumailmapallon noustessa? Kuvaile parillesi suoran käyttäytymistä.

c. Mikä on suurin mahdollinen suuntakulman arvo? Perustele.

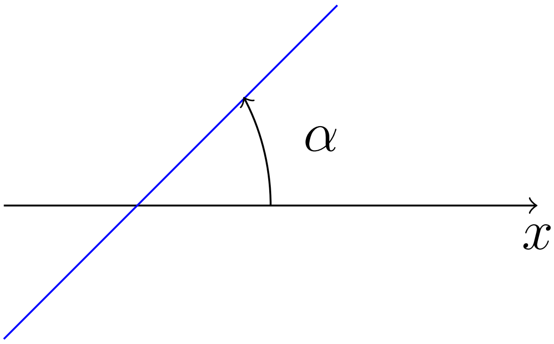
d. Kuumailmapallo pysähtyy pisteeseen $Q = (x, y)$. Mikä on tällöin suuntakulma? Muodosta lauseke suuntakulman tangentille.

e. Mikä on kyseisen suoran kulmakerroin?

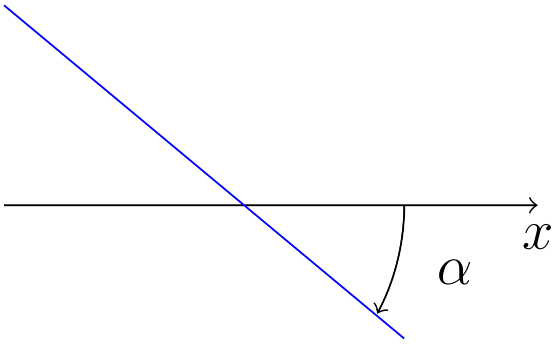
f. Pohtikaa yhdessä parin kanssa, millainen yhteys suoran suuntakulmalla ja kulmakertoimella havaitaan.

**Määritelmä A.13** Suoran *suuntakulma* $\alpha$ on tason suoran ja $x$-akselin positiivisen suunnan välinen kulma. Se kuvaa suoran kaltevuutta. Suuntakulma on aina välillä $-90\,^\circ < \alpha \leq 90\,^\circ$

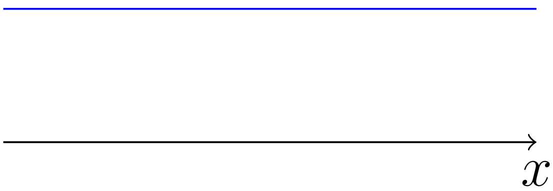
On sovittu, että suuntakulma on välillä $]-90\,^\circ, 90\,^\circ]$. Suoran ollessa pystysuora suora, valitaan suuntakulmaksi positiivinen kulma. Tästä syystä positiivinen kulma $90\,^\circ$ kuuluu mukaan suuntakulman mahdollisiin arvoihin.
Kuvissa suuntakulman suuntaa korostetaan kiertosuuntaa osoittavalla nuolen kärjellä, joka lisätään kulman kaarimerkintään.



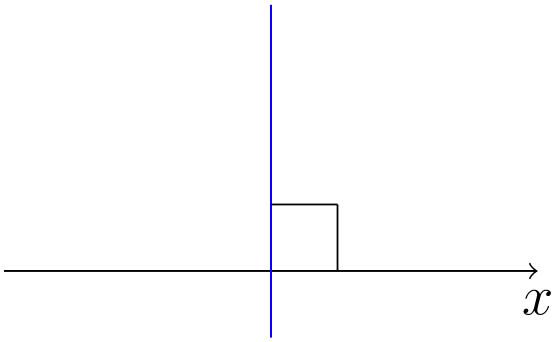

(a) Nouseva suora; kulmakerroin ja suuntakulma ovat positiivisia $k > 0$ ja $0\,^\circ < \alpha < 90\,^\circ$




(b) Laskeva suora; kulmakerroin ja suuntakulma ovat negatiivisia $k < 0$ ja $-90\,^\circ < \alpha < 0\,^\circ$




(c) Vaakasuora suora; kulmakerroin ja suuntakulma ovat nollia $k = 0$ ja $\alpha = 0°$




(d) Pystysuora suora; kulmakerrointa ei ole olemassa, suuntakulma $\alpha = 90°$

**Lause A.14** Suoran kulmakerroin $k$ on suuntakulman $\alpha$ tangentti eli $k = \tan\alpha$, kun $-90\,^\circ < \alpha < 90\,^\circ$

**Huomautus A.15** Vaikka suuntakulma $\alpha$ on välillä $]-90\,^\circ, 90\,^\circ]$ ( $90\,^\circ$ kuuluu välille), suuntakulman tangenttia ei voida ottaa kulman ollessa $90\,^\circ$. Mieti miksi!

**Pohdinta A.16** Suora kulkee pisteiden $(-3, 1)$ ja $(4, -2)$ kautta. Minkä yhtälön suoralla olevan pisteen $(x, y)$ koordinaatit toteuttavat? Alla on Aleksin ratkaisu tehtävään, mutta ratkaisun vaiheet ovat väärässä järjestyksessä. Järjestä ratkaisun vaiheet. Mieti, mitä kussakin vaiheessa on tehty.

$$\boxed{y = \frac{((-2) - 1)}{(4 - (-3))}(x + 3) + 1}$$

$$\boxed{7y = -3x - 2}$$

$$\boxed{y = \frac{-3}{7}x + \frac{-3}{7} \cdot 3 + 1}$$

$$\boxed{7y + 3x + 2 = 0}$$

$$\boxed{y = -\frac{3}{7}x - \frac{2}{7}}$$

$$\boxed{y - 1 = k(x - (-3))}$$

Kun olet saanut ratkaisun vaiheet järjestettyä, tutki tarkemmin kahta viimeistä vaihetta. Mitä suoran yhtälölle on tehty?

**Lause A.17** Tason pisteet muodostavat suoran jos ja vain jos ne toteuttavat yhtälön

$$ax + by + c = 0,$$

jossa $a \neq 0$ tai $b \neq 0$.

Tätä kutsutaan yleiseksi suoran yhtälöksi.

**Pohdinta A.18** Tason suora on muotoa $4y + 3x - 5 = 0$. Määritä suoran yhtälöstä suoran kulmakerroin, $x$-akselin leikkauspiste ja $y$-akselin leikkauspiste.
Alla on Elisen ja Hemmon ratkaisut tehtävään.

Elisen ratkaisu:
Muokattu suoran yhtälö

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4},$$

josta saadaan

$$k = -\frac{3}{4}.$$

$x$-akselin leikkauspiste:

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4} = 0$$

$$\frac{3}{4}x = -\frac{5}{4}$$

$$x = -\frac{5}{3}$$

Eli $(-\frac{5}{3}, 0)$
$y$-akselin leikkauspiste:

$$y = -\frac{3}{4} \cdot 0 + \frac{5}{4}$$

$$y = \frac{5}{4}$$

Eli $(0, \frac{5}{4})$

Hemmon ratkaisu:
Suoran yhtälö

$$4y + 3x - 5 = 0,$$

josta saadaan

$$k = 3.$$

$x$-akselin leikkauspiste:

$$4 \cdot 0 + 3x - 5 = 0$$

$$3x = 5$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Eli $(\frac{5}{3}, 0)$
$y$-akselin leikkauspiste:

$$4y + 3 \cdot 0 - 5 = 0$$

$$4y = 5$$

$$y = \frac{5}{4}$$

Eli $(0, \frac{5}{4})$

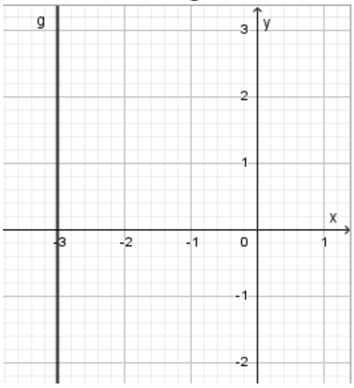
Vertaile ratkaisuja.

a. Mitä opiskelijat ovat tehneet kussakin välivaiheessa?

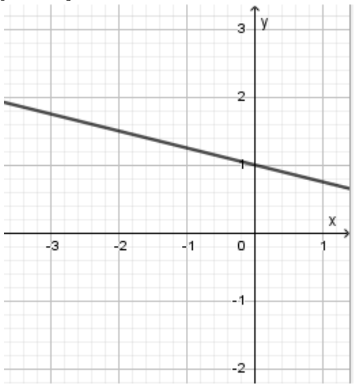
b. Miten ratkaisut eroavat toisistaan? Mitä ratkaisuissa on tehty oikein ja missä on menty harhaan?

c. Onko virheen/virheiden taustalla laskuvirhe vai ajatusvirhe? Perustele.

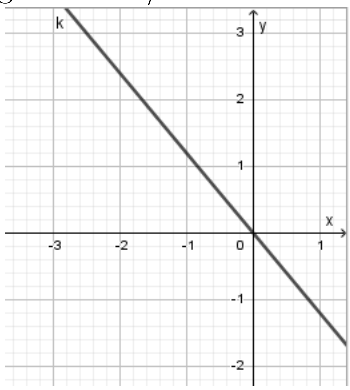
**1.** Yhdistä graafinen esitys ja sitä vastaava algebrallinen/sanallinen esitys.



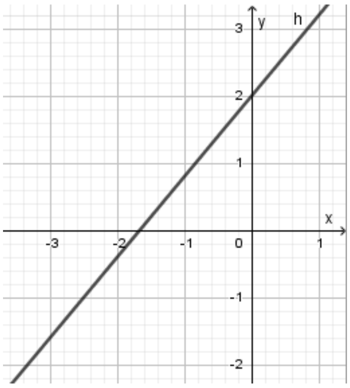

1.



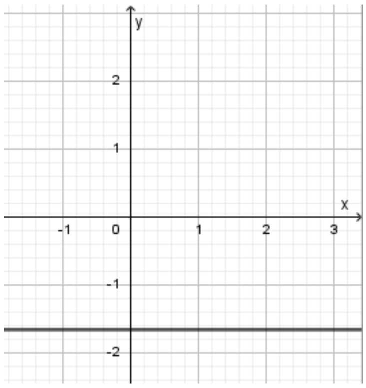

2.



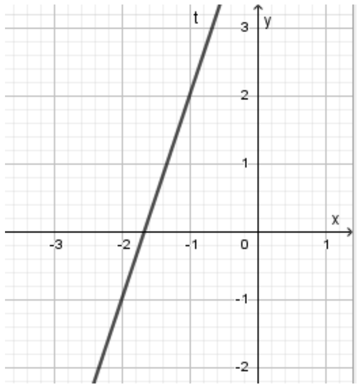

3.




4.




5.




6.

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | Suoran suuntakulma on 50° | B | $x + 5 = 2$ |
| C | Yhdensuuntainen suoran $2y - 6x + 100$ kanssa. | D | $3y + 5 = 0$ |
| E | $\bar{s} = -4i + j$ | F | Kulmakerrointa ei voida määrittää. |

**2.** Muodosta sellaisen suoran yhtälö, joka on

a. laskeva suora ja kulkee pisteen $(1, 2)$ kautta

b. yhdensuuntainen suoran $y = \frac{1}{3}x - 4$ kanssa leikkaa $y$-akselin kohdassa $y = 1$.

c. Pohdi onko a- ja b-kohtiin muita mahdollisia ratkaisuja kuin muodostamasi suoran yhtälöt. Perustele.

d. Tutki ovatko pisteet $(18, -21)$, $(-15, -6)$ ja $(40, -31)$ samalla suoralla.

**3.** Juoksija ottaa 10 metrin vetoja hölkäten 10 metriä jokaisen vedon välissä. Jokaiselle 10 metrin matkalle mitattiin aika ja mittaustulokset sijoitettiin koordinaatistoon. Laske juoksijan keskinopeus[1] kullekin 10 metrin matkalle.


Mitä juoksija tekee ajan hetkellä $t = 11,25s$?

**4.** Mitkä esitysmuodoista kuvaavat samaa suoraa tai sen suuntaa?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | $y = -4x + 5$ | B | $\bar{s} = 3\bar{i} + 2\bar{j}$ | C | $4x + y - 5 = 0$ |
| D | $y = \frac{2}{3}x + 1$ | E | $\bar{u} = \bar{i} + 2\bar{j}$ | F | $3y - 2x - 3 = 0$ |
| G | $-2x + y + 3 = 0$ | H | $\frac{2}{3}x - y + 1 = 0$ | I | $\bar{v} = 2\bar{i} + 4\bar{j}$ |

**5.** Yleinen suoran yhtälö on muotoa $ax + by + c = 0$. Muodosta lausekkeet kulmakertoimelle, $x$-akselin leikkauspisteelle ja $y$-akselin leikkauspisteelle. Miksi kertoimille $a$ ja $b$ täytyy olla määrittelyehto?

## A.2 Suorien keskinäinen asema

**Pohdinta A.19** Opiskelija ratkaisee erästä tehtävää. Hänellä on kahden suoran yhtälöt $y = 2x + 3$ ja $y = -x - 1$. Ensimmäisessä vaiheessa hän merkitsee

$$2x + 3 = -x - 1.$$

Mitä opiskelija teki? Mitä yhteistä hän olettaa suorilla olevan?

Seuraavaksi opiskelija ratkaisee muodostamansa yhtälön seuraavasti

$$\begin{aligned} 2x + x + 3 &= -1 \\ 3x &= -1 - 3 \\ 3x &= -4 \\ x &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

[1]Keskinopeuden määritelmä on kuljettu matka jaettuna matkaan käytetty aika

Mitä opiskelijan saama vastaus tarkoittaa?

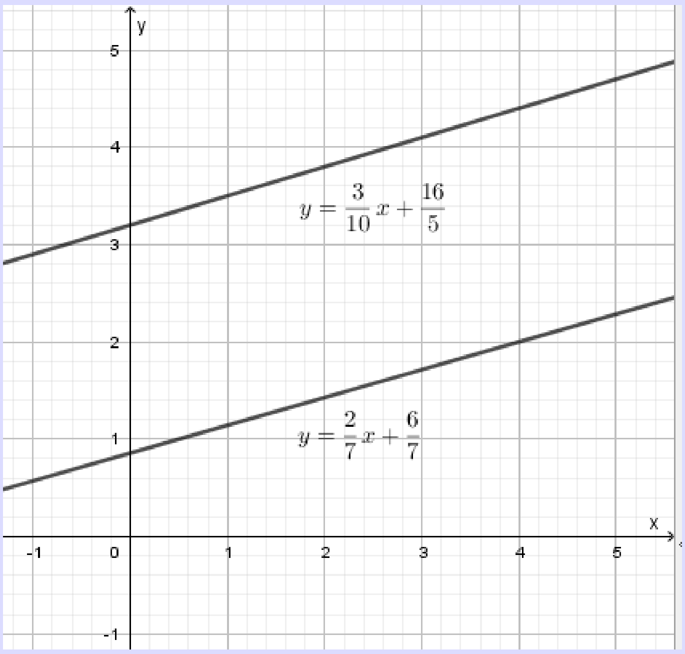
Tehtävän ratkaisu on vielä kesken. Mitkä ovat suorien $y$-koordinaattien arvot kyseisessä tilanteessa?

Selitä mitä saamasi vastaus tarkoittaa.

Mitä tehtävässä on kysytty?

**Pohdinta A.20** Pohdi seuraavia väittämiä. Ovatko väittämät totta vai tarua? Ovatko jotkut väittämistä joskus totta? Perustele.

a. Kuvan suorilla ei ole yhteisiä pisteitä.



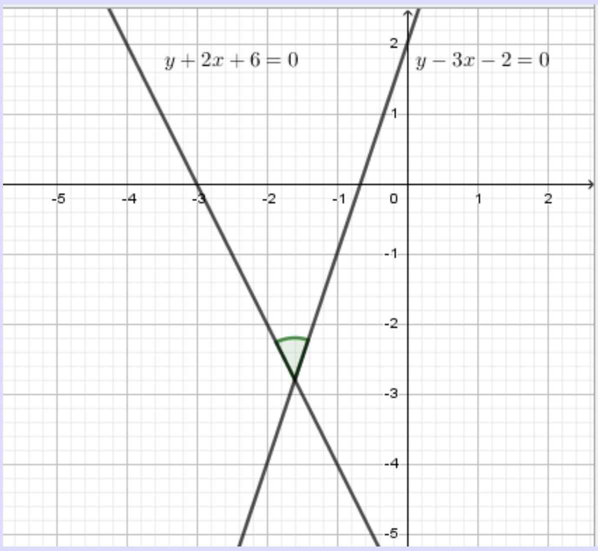

b. Suorilla $y = -\frac{1}{2}x - 2$ ja $x + 2y + 4 = 0$ on täsmälleen yksi yhteinen piste.

c. Suorilla $y = -5x + 10$ ja $y = k_1 x - 123$ ei ole yhteisiä pisteitä.

d. Suorilla $-x + 3y + 2 = 0$ ja $y = \frac{1}{3}x + b_1$ on joko ääretön määrä yhteisiä pisteitä tai ei yhtään.

Tason suorilla voi olla yhteisiä pisteitä joko yksi, ei yhtään tai ääretön määrä. Kun tason suorilla on yksi yhteinen piste, suorat leikkaavat toisensa. Kun suorilla ei ole yhteisiä pisteitä, suorat ovat yhdensuuntaiset. Kun suorilla on ääretön määrä yhteisiä pisteitä, suorat ovat samat. Yhteiset pisteet voidaan selvittää ratkaisemalla suorien yhtälöstä muodostettu yhtälöpari.

**Pohdinta A.21** Selvitä suorien välinen terävä kulma.




Alla on Kaarlon ja Vernan ratkaisut tehtävään.

Kaarlon ratkaisu:

$$y + 2x + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = -2$$

Nyt

$$\tan \alpha_1 = -2,$$

jolloin $\alpha_1 = -63,43494...^\circ$
ja

$$y - 3x - 2 = 0 \Rightarrow k_2 = 3$$

Nyt

$$\tan \alpha_2 = 3,$$

jolloin $\alpha_2 = 71,56505...^\circ$

Kolmion kulmien summa on $180^\circ$, joten

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + \alpha = 180^\circ$$

Tällöin suorien välinen terävä kulma

$$\begin{aligned}\alpha &= 180^\circ - |\alpha_1| - |\alpha_2| \\ &= 180^\circ - 63,43494...^\circ - 71,56505...^\circ \\ &= 45^\circ\end{aligned}$$

Vernan ratkaisu:
Eräs suuntavektori suoralle

$$y + 2x + 6 = 0$$

on

$$\bar{s}_1 = \bar{i} - 2\bar{j}$$

ja eräs suuntavektori suoralle

$$y - 3x - 2 = 0$$

on

$$\bar{s}_2 = \bar{i} + 3\bar{j}.$$

Vektoreiden välinen kulma saadaan kaavalla

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}.$$

Merkitään vektoreiden $\bar{s}_1$ ja $\bar{s}_2$ välistä kulmaa $\alpha$. Eli

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{1 \cdot 1 + 3 \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} \\ &= \frac{-5}{\sqrt{50}}\end{aligned}$$

$$\alpha = 135^\circ$$

Vertaile ratkaisuja.

a. Pohdi, mitä eri vaiheissa on tehty.
b. Onko ratkaisuissa virheitä? Jos on, korjaa virheet. Mieti, missä kohdissa virheitä mielestäsi helpoiten tulisi ja miksi.
c. Kummalla tavalla itse ratkaisisit tehtävän ja miksi?

**Määritelmä A.22** *Suorien välinen kulma* on kahden leikkaavan suoran välinen terävä kulma ja aina positiivinen.

**Pohdinta A.23** Keskustele parisi kanssa. Ovatko väittämät aina totta (A), joskus totta (J) vai ei koskaan totta (E)? Perustele.

a. Kaksi nousevaa tai laskevaa suoraa voivat leikata toisensa.
b. Kaksi nousevaa tai laskevaa suoraa voivat leikata toisensa kohtisuorasti.
c. Suorien kulmakertoimien täytyy olla positiivisia, jotta ne voivat leikata toisensa kohtisuorasti.
d. Toisensa leikkaavat suorat ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.
e. Kohtisuorassa toisiaan vastaan olevat suorat ovat toisensa leikkaavia suoria.

**Lause A.24** Suorat $l_1$ ja $l_2$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan jos ja vain jos niiden kulmakertoimien $k_1$ ja $k_2$ tulo on $k_1k_2 = -1$ tai suorat ovat eri koordinaattiakselien suuntaiset.

**Pohdinta A.25** Kaisa on ratkaissut seuraavan tehtävän.

Kaksi suoraa ovat kohtisuorassa toisiaan vasten. Eräät suorien suuntavektorit ovat $\bar{s}_1 = \bar{i} + k_1\bar{j}$ ja $\bar{s}_2 = \bar{i} + k_2\bar{j}$. Osoita, että suorien kulmakerrointen tulo on $-1$.

Laita ratkaisun vaiheet oikeaan järjestykseen. Selitä parillesi mitä eri vaiheissa on tehty.

$$\boxed{s_{1x} \cdot s_{2x} + s_{1y} \cdot s_{2y} = 0}$$

$$\boxed{k_1 k_2 = -1}$$

$$\boxed{(\bar{i} + k_1 \bar{j}) \cdot (\bar{i} + k_2 \bar{j}) = 0}$$

$$\boxed{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = 0}$$

$$\boxed{1 \cdot 1 + k_1 \cdot k_2 = 0}$$

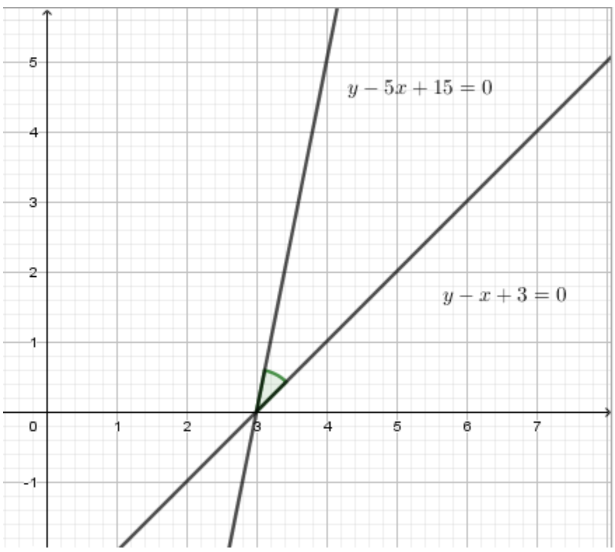
**Lause A.26** Jos suorat $y = k_1 x + b_1$ ja $y = k_2 x + b_2$ eivät ole kohtisuorassa toisiaan vastaan, niiden välinen kulma $\alpha$ toteuttaa yhtälön

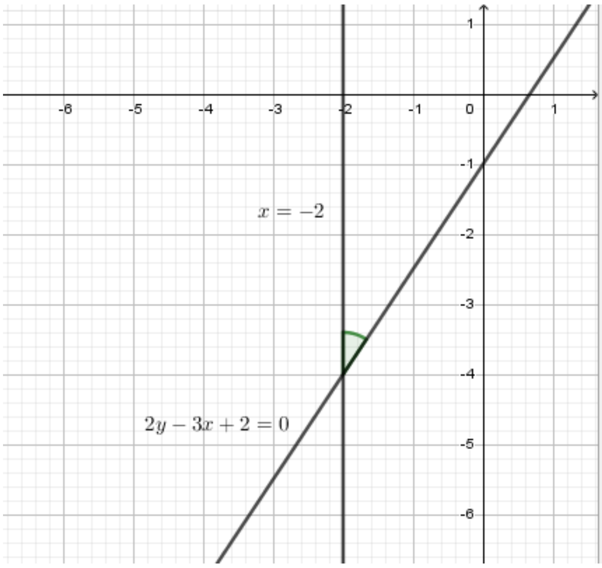
$$\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

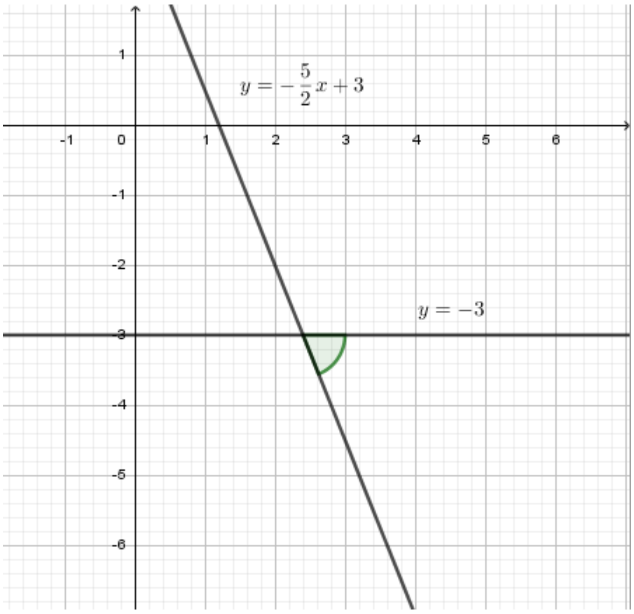
**6.** Tutki GeoGebralla suorien $y_1$ ja $y_2$ kuvaajia. Milloin suorilla on yhteisiä pisteitä? Selvitä kaikki tilanteet ja kerro kyseisten tilanteiden suorien yhtälöt.

**7.** Selvitä suorien välinen terävä kulma

a.



b. 


c. 


d. c)-kohdassa on kyse leikkaavien suorien erityistapauksesta. Mistä?

**8.** Olkoon suora $s$ muotoa $3x + 2y + 1 = 0$. Muodosta sellaisen suoran yhtälö, joka on kohtisuorassa suoraa $s$ vastaan ja kulkee pisteen $(1, 1)$ kautta. Tarkista vastauksesi GeoGeobran avulla.

**9.** Selvitä suorien $y = 2x + 5$, $2y + x = 0$ ja $3y + 4x - 5 = 0$ muodostaman kolmion kärkipisteet sekä suorien väliset kulmat. Mihin kategoriaan kolmio kuuluu?

**10.** Määritä vakio $a$ siten, että suorat $ax + 3y = 6$ ja $2x - (a + 1)y = 2a + 2$ ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

# B Opettajan opas

## B.1 Ajankäyttösuunnitelma

Oppimateriaalia varten on suunniteltu käytettävän kaksi 75 minuutin oppituntia. Ensimmäinen 75 minuutin oppitunti käytettäisiin Suora -kappaleeseen ja toinen Suorien keskinäinen asema -kappaleeseen.

## B.2 Suora

Pohdintatehtävässä A.1 on tarkoitus lähteä konkreettisen esimerkin kautta palauttamaan mieleen suoran ominaisuuksia. Tehtävän yhteydessä on syytä pohtia, mikä merkitys peruspalkalla on käyrää piirrettäessä. Haastetta tehtävään saadaan pohtimalla, mikä merkitys yhden tuotteen myynnistä saadulla bonuksella on käyrän ominaisuuksiin. Jotta tehtävän a-kohta ei jää irralliseksi, on tehtävän lopuksi kuitenkin hyvä käydä yhteisesti läpi kaikkien kanssa, mikä merkitys bonuksella on käyrän ominaisuuksiin. Tässä viitataan jo kulmakertoimeen, joten siihen voi myös palata, kun kulmakertoimen määritelmä on käyty läpi.

**Vastaus:** a) 10€/tuote b) 1500€ c) Kuvaaja. d) Kuvaaja on suora, joka kuvaa kokonaispalkkaa myytyjen tuotteiden määrän funktiona. Yhden tuotteen bonus on suoran kulmakerroin. Peruspalkka on $y$-akselin leikkauspiste.

Pohdintatehtävä A.4 on rutiininomainen tehtävä, jonka tarkoituksena on harjoittaa kulmakertoimen laskemista sekä pohtia, miten kulmakertoimen muuttuminen näkyy suoran kuvaajassa. Varsinkin kuvailtaessa suoran ominaisuuksia ja kulmakertoimen vaikutusta niihin olisi hyvä mallintaa havaintoja GeoGebran avulla.

**Vastaus:** a) Suorien kulmakertoimet ovat $\frac{1}{2}, -2, 0$ ja $-$ b) Pystysuorille suorille ei voida määrittää kulmakerrointa. c) Kokonaislukukulmakertoimet; miten kasvu vaikuttaa suoran kulkuun, sama tarkastelu murtolukukulmakertoimille.

Pohdintatehtävässä A.5 johdatellaan suoran yhtälöön. Tarkoituksena on saada opiskelijat itse muodostamaan suoralle muoto $y = kx + b$ . Ensin muodostetaan yhtälö origon kautta kulkevalle suoralle. Tämän tarkoitus on johdatella opiskelija muodostamaan suoran yhtälö ja huomaamaan mistä termin $x$ kerroin saadaan. Tämän jälkeen johdatellaan toisella suoralla opiskelijoita löytämään suoran yhtälön vakiotermi.

**Vastaus:** a) $y$-koordinaatti on kaksinkertainen $x$-koordinaatin arvoon nähden. b) $k = 2$ c) $y = 2x$ d) Sama kulmakerroin. e) $y$-koordinaatin arvoihin on lisätty 5. f) Suoran ja $y$-akselin leikkauspiste on kasvanut viidellä. g) Esimerkiksi $-1 = 2 \cdot (-3) + 5$ ja muut vastaavasti. h) $y = 2x + 5$ i) Kulmakerrointa. j) $y$-akselin leikkauspistettä. k) Suoran $f$ yhtälö on $y = 2x$ ja suoran $g$ yhtälö on $y = 2x + 5$

Pohdintatehtävässä A.9 palataan samoihin suoriin kuin pohdintatehtävässä A.4 ja tarkastellaan suoria suuntavektoreiden kautta. Tällöin on niin sanotusti puolet tehtävästä jo tehty, koska suorille tiedetään jo kulmakertoimet ja voidaan luoda yhteys kulmakertoimen ja suuntavektorin välille. Tarkoitus on vertailla samoille suorille eri matemaattisia muotoja. f) -kohta on ylöspäin eriyttävä.

**Vastaus:** a) Esim. $\bar{s}_1 = 2\bar{i} + \bar{j}$, $\bar{s}_2 = 2\bar{i} - 4\bar{j}$, $\bar{s}_3 = \bar{i}$ ja $\bar{s}_4 = \bar{j}$. b) - c) - d) Esim. $\bar{s}_1 = 2\bar{i} + 1\bar{j}$, jolloin kulmakerroin $k = \frac{1}{2}$. e) Esim. $k = -2$ $\bar{s} = \bar{i} - 2\bar{j}$. f) $\bar{s} = \bar{i} + k\bar{j}$

Pohdintatehtävän A.12 tarkoituksena on oppia ymmärtämään kulmakertoimen ja suuntakulman välinen yhteys ja johdattaa opiskelijat suuntakulman määritelmään. Tämä tehtävä olisi tarkoitus tehdä ilman GeoGebraa, mutta alaspäin eriyttämisessä voisi käyttää GeoGebraa apuna helpottamaan havainnointia suoran käyttäytymisestä sekä suuntakulman ja kulmakertoimen suuruudesta ja niiden yhteydestä.

**Vastaus:** a) Kulmakerroin kasvaa. b) Suuntakulma kasvaa. c) 90° Perustelut.

d) $\tan\alpha = \frac{y-y_0}{x-x_0}$ e) $k = \frac{y-y_0}{x-x_0}$ f) -

Pohdintatehtävässä A.16 tarkoituksena on saada opiskelijat huomaamaan yhteys yleisen suoran yhtälön ja pisteen kautta kulkevan suoran yhtälön välillä.

**Vastaus:** Jos vaiheet numeroi, järjestys on $6, 1, 3, 5, 2, 4$

Pohdintatehtävän A.18 tarkoitus on huomata eri suoran yhtälön muotojen käyttökelpoisuus, mahdolliset kompastuskivet sekä tulkinnallisuus. Opiskelijat pääsevät vertailemaan eri ratkaisutapoja ja samalla pohtimaan miten he itse olisivat tehtävän ratkaisseet.

**Vastaus:** a) - b) & c) Lähtötilanne: ratkaistu suoran yhtälö vs. yleinen suoran yhtälö. Yleisestä suoran yhtälöstä ei voi suoraan ottaa termin $x$ kerrointa kulmakertoimeksi, Hemmon ratkaisussa ajatusvirhe. Elisen ratkaisussa $x$-akselin leikkauspisteen laskussa laskuvirhe.

## B.3 Suorien keskinäinen asema

Pohdintatehtävässä A.19 tarkoituksena on lähteä tutkimaan valmista ratkaisua ja pohtimaan, mitä tehtävässä on tehty ja mitä siinä on alunperin edes kysytty. Tarkoitus on johdattaa opiskelijat huomaamaan suorien välisen leikkauspisteen ratkaisun mekaanisen laskemisen taustalla oleva ajatus. Tärkeää on hoksata valmiin ratkaisun oletettu suorien yhteinen koordinaatti eli leikkauspiste.

**Vastaus:** Opiskelija oletti, että suorien $y$-koordinaatit ovat samat jossakin pisteessä. Tuon kyseisen pisteen $x$-koordinaatti on $x = -\frac{4}{3}$. $y$-koordinaatin arvo, kun $x = -\frac{4}{3}$ on $y = \frac{1}{3}$. Tehtävässä on kysytty suorien leikkauspistettä.

Pohdintatehtävän A.20 tarkoitus on selvittää, mitä erilaisia mahdollisia suorien keskinäisiä asemia on olemassa. Tarkoitus on saada opiskelijat huomaamaan kaikki eri tilanteet itse ja mitkä asiat vaikuttavat eri tilanteisiin, milloin eri tilanteet ovat mahdollisia ja milloin ei. Tässä tehtävässä GeoGebran käyttäminen on suotavaa, sillä se auttaa hahmottamaan tilanteita paremmin ja varsinkin a)-kohdan suorien leikkauspisteen näkeminen omin silmin voi auttaa ymmärtämään tilannetta.

**Vastaus:** a) Tarua. b) Tarua. c) Joskus totta, eli kun $k_1 = -5$. d) Totta.

Pohdintatehtävässä A.21 tutkitaan suorien välistä kulmaa. Tarkoituksena on saada opiskelijat ajattelemaan, mitä kulmaa mikäkin kulmamerkintä tarkoittaa ja miten ne on laskettu. Vertaamalla kahta valmista, erilaista ratkaisua opiskelijat saavat vaihtoehtoisia ratkaisutapoja ja pääsevät tekemään havaintoja molempien tapojen hyödyllisyydestä. Tehtävää tehtäessä voisi palauttaa mieleen vektoreiden laskusääntöjä, kuten pistetulo ja vektorin pituus. Vektoreiden välistä kulmaa laskettaessa huomattava minkä kulman kaava antaa ja mitä kysytään.

**Vastaus:** a) - b) Vernan ratkaisun loppu, kysytty kulma on vastauksen vieruskulma eli $45°$. c) Mielipide.

Pohdintatehtävän A.23 tarkoituksena on saada opiskelijat keskustelemaan siitä, millaisia leikkaavia suoria on olemassa ja mitä ominaisuuksia suorilla tulee olla, jotta ne leikkaavat tietyllä tavalla. Tällä halutaan ohjata ajattelua siihen suuntaan, että kohtisuorien suorien kulmakerrointen tulo on $-1$, vaikka tätä ei suoraan tässä tehtävässä saada vastaukseksi.

**Vastaus:** a) A b) E c) E d) J e) A

Pohdintatehtävässä A.25 on tarkoitus todistaa lause A.24 järjestelemällä ratkaisun vaiheet. Tässä opiskelijoita kannustetaan huomaamaan, että todistustehtävät eivät ole aina pitkiä ja monimutkaisia sekä rohkaista opiskelijoita todistamaan matemaattisesti. Kuten muihinkin pohdinta- ja harjoitustehtäviin voi tähänkin ottaa GeoGebran mukaan ja havainnollistaa kohtisuoruutta myös graafisesti.

**Vastaus:** Jos vaiheet numeroidaan, oikea järjestys on 4, 1, 3, 5 ja 2

# C Tehtävien vastaukset

**1.**

1BF, 2E, 3, 4A, 5D ja 6C

**2.**

a) Esim. $y = -3x + 5$

b) $3y - x - 3 = 0$

c) -

d) Ovat samalla suoralla.

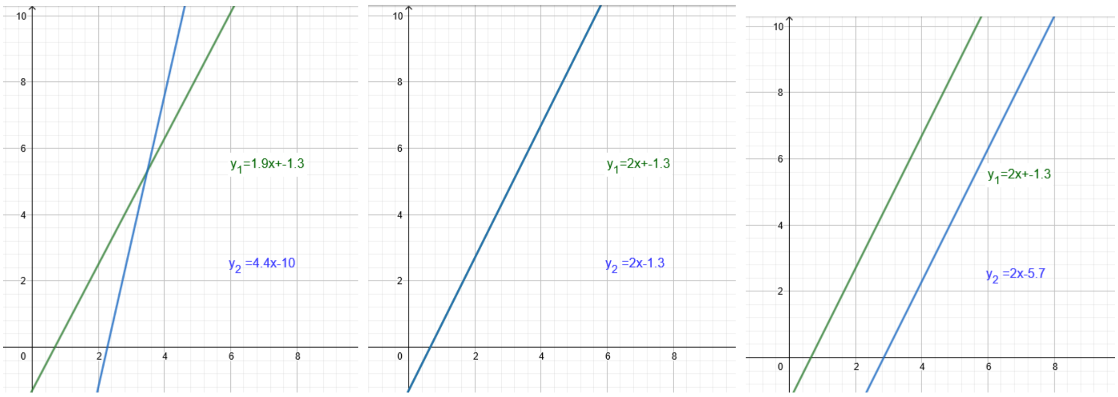
**3.**

$v_1 = 6,7\ m/s$ , $v_2 = 3,3\ m/s$ , $v_3 = 5,7\ m/s$ , $v_4 = 2,0\ m/s$
Juoksija pysähtyy ajan hetkellä $t = 11,25$.

**4.** AC, BDFH, EGI

**5.** $k = -\frac{a}{b}$, $x$-akselin leikkauspiste $-\frac{c}{a}$ ja $y$-akselin leikkauspiste $-\frac{c}{b}$

**6.** Esimerkiksi




**7.**

a. $33,7°$

b. $33,7°$

c. $68,2°$

d. Suuntakulma.

**8.** $3y - 2x - 1 = 0$

**9.** Kärkipisteet $(-2,1)$, $(2,-1)$ ja $(-1,3)$, suorien väliset kulmat $90°$, $63,4°$ ja $26,6°$. Kyseessä on suorakulmainen kolmio.

**10.** $a = -3$